

MATHEMATICS

गणित

(311)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे]

[पूर्णांक : 100

- Note :* (i) This Question Paper consists of *two* Sections, viz., 'A' and 'B'.
- (ii) All questions from Section 'A' are to be attempted. However, in some questions, internal choice is given.
- (iii) Section 'B' has *two* options. Candidates are required to attempt questions from *one option* only.

- निर्देश :** (i) इस प्रश्न-पत्र में दो खण्ड हैं—खण्ड 'अ' तथा खण्ड 'ब'।
- (ii) खण्ड 'अ' के सभी प्रश्नों को हल करना है। कुछ प्रश्नों के अन्तर्गत विकल्प दिए गए हैं।
- (iii) खण्ड 'ब' में दो विकल्प हैं। परीक्षार्थियों को केवल एक विकल्प के ही प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

SECTION-A

खण्ड-अ

1. If 1, ω , ω^2 are cube roots of unity, then prove that $(1 + \omega)(1 + \omega^2) = -1$.

यदि 1, ω , ω^2 एक के घनमूल हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 + \omega)(1 + \omega^2) = -1$.

2. If ${}^{2n-1}P_n : {}^{2n-1}P_{n-1} = 1:42$, find the value of n .

यदि ${}^{2n-1}P_n : {}^{2n-1}P_{n-1} = 1:42$ है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

3. How many 3-digit numbers can be formed with the digits 1, 4, 7, 8 and 9, if the digits are not repeated? 2

अंकों 1, 4, 7, 8 तथा 9 से, बिना किसी अंक को दोहराए, 3 अंकों वाली कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

4. Find the equation of the circle with centre at the point (1, 5) and which passes through the point (7, -1). 2

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र बिन्दु (1, 5) पर है तथा जो बिन्दु (7, -1) से होकर जाता है।

5. In a GP, 5th and 8th terms are 80 and 640 respectively. Find the GP. 2

एक गुणोत्तर श्रेणी का 5वाँ तथा 8वाँ पद क्रमशः 80 तथा 640 हैं। गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

6. If $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{8, 10, 12, 14\}$ and $C = \{14, 16, 18, 20\}$, then find $A \cap (B \cup C)$. 2

यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{8, 10, 12, 14\}$ तथा $C = \{14, 16, 18, 20\}$ हैं, तो $A \cap (B \cup C)$ ज्ञात कीजिए।

7. Write the domain of $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. 2

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ का प्रांत लिखिए।

Or / अथवा

Write the domain of $f(x) = \frac{1}{3x^2 - 6}$.

$f(x) = \frac{1}{3x^2 - 6}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

8. Evaluate :

2

मान ज्ञात कीजिए :

$$\cos^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{5}{13}$$

9. Solve for x :

3

x के लिए हल कीजिए :

$$(a - b)^2 x^2 - 6(a^2 - b^2)x + 9(a - b)^2 = 0$$

Or / अथवा

Solve for x :

x के लिए हल कीजिए :

$$\frac{1}{a - b} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{x}, \quad a - b \neq 0 \text{ and (तथा) } x \neq (a - b)$$

10. If $\frac{x}{2x} - \frac{y}{3y} = \frac{x}{2z} - \frac{z}{w} = \frac{2}{8} - \frac{2}{10}$, find the values of x , y , z and w .

3

यदि $\frac{x}{2x} - \frac{y}{3y} = \frac{x}{2z} - \frac{z}{w} = \frac{2}{8} - \frac{2}{10}$ है, तो x , y , z तथा w के मान ज्ञात कीजिए।

11. Find the equation of tangent to the curve $y = x^2 - 3x + 5$ at the point (1, 3). 3

वक्र $y = x^2 - 3x + 5$ के बिन्दु (1, 3) पर स्पर्श-रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the domain of $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

12. Evaluate : 3

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$$

Or / अथवा

Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 4x}{\sin 2x - \sin 3x}$$

13. In a simultaneous toss of two coins, find the probability of getting (a) 2 heads and (b) exactly 1 head. 3

दो सिक्के एकसाथ उछाले गए। निम्न ज्ञात करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(क) 2 चित

(ख) केवल 1 चित

Or / अथवा

Find the probability of getting both red balls, when from a bag containing 5 red and 4 black balls, two balls are drawn at random (a) with replacement and (b) without replacement.

एक थैले, जिसमें 5 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं, में से दो गेंदें यादृच्छया निकाली गईं। दोनों गेंदों के लाल रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब गेंदें निकालने के बाद (क) वापिस रख दी जाती है तथा (ख) वापिस नहीं रखी जाती।

14. Using principle of mathematical induction, prove that $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, where n is a natural number. 4

गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

Or / अथवा

Find the middle term in the expansion of $(x^2 + y^2)^8$.

$(x^2 + y^2)^8$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

15. Find the equation of the line passing through the points (3, 7) and (2, 5). 4

उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (3, 7) तथा (2, 5) से होकर जाती है।

16. Find the equation of the circle which passes through the points (1, 0), (0, 6) and (3, 4). 4

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1, 0), (0, 6) तथा (3, 4) से होकर जाता है।

17. If $y = \sin^{-1}[2x\sqrt{1-x^2}]$, find $\frac{dy}{dx}$. 4

यदि $y = \sin^{-1}[2x\sqrt{1-x^2}]$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

If $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

18. Solve the following differential equation : 4

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = y + 4x$$

19. Find the mean and variance of the following data : 4

निम्न आँकड़ों के लिए माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए :

Classes (वर्ग)	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
Frequencies (बारंबारता)	2	3	8	12	16	5	2	2

20. Using matrices, solve the following system of equations : 6

आव्यूहों का प्रयोग करके निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\begin{array}{rrcr} x & y & z & 3 \\ 2x & y & z & 2 \\ \hline x & 2y & 3z & 2 \end{array}$$

- 21.** The 35th term of an AP is 69. Find the sum of its 69 terms. 6

एक समांतर श्रेणी का 35वाँ पद 69 है। उसके 69 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

- 22.** Solve the following trigonometric equation for general solution : 6

निम्न त्रिकोणमितीय समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$$2\cos^2 \theta - 3\sin \theta = 0$$

Or / अथवा

In a $\triangle ABC$ if $A = 60^\circ$, prove that $\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} = 1$.

किसी त्रिभुज ABC में यदि $A = 60^\circ$, दर्शाइए कि $\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} = 1$.

- 23.** Find two positive numbers whose sum is 24 and the product is maximum. 6

ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है तथा जिनका गुणनफल अधिकतम है।

- 24.** Find $\int_1^2 (x^2 - 2) dx$ as limit of sum. 6

$\int_1^2 (x^2 - 2) dx$ का मान योग की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the area of the region bounded above by $y = x + 6$, bounded below by $y = x^2$ and bounded on the sides by the lines $x = 0$ and $x = 2$.

$y = x + 6$ द्वारा ऊपर से, $y = x^2$ द्वारा नीचे से, तथा आस-पास से रेखाओं $x = 0$ तथा $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

SECTION-B

खण्ड-ब

OPTION-I

विकल्प-I

(Vectors and Three-dimensional Geometry)

(सदिश तथा त्रि-आयाम ज्यामिति)

25. Prove that the points A, B and C with respective position vectors $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $5\vec{a} - \vec{b}$ and $\vec{a} - 5\vec{b}$ are collinear. 2

सिद्ध कीजिए कि बिन्दु A, B तथा C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $5\vec{a} - \vec{b}$ तथा $\vec{a} - 5\vec{b}$ हैं, संरेख हैं।

26. Find a unit vector in the direction of $\vec{a} + \vec{b}$, where $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$. 3

$\vec{a} + \vec{b}$ की दिशा में एक एकक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ है।

27. The foot of the perpendicular drawn from the origin to a plane is $(4, -2, 5)$. Find the equation of the plane. 4

मूलबिन्दु से किसी समतल पर खींचे गए लंब के पाद के निर्देशांक $(4, -2, 5)$ हैं। उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

28. Find the projection of vector $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ on the vector $4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$. 6

सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

Or / अथवा

Find the centre and radius of the circle given by the equations $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 12z - 36 = 0$, $x - 2y - 2z = 1$.

समीकरणों $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 12z - 36 = 0$, $x - 2y - 2z = 1$ द्वारा प्राप्त वृत्त का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

OPTION-II

विकल्प-II

(Mathematics for Commerce, Economics and Business)

(वाणिज्य, अर्थशास्त्र तथा व्यवसाय के लिए गणित)

25. Mohan invested a part of Rs 15,000 in 5% stock at 90 and the remaining in 7% stock at 120. If his total income from the stocks is Rs 855, find his respective investments in two stocks.

2

मोहन ने 15,000 रु० का कुछ भाग 90 पर 5% स्टॉक में तथा शेष 120 पर 7% स्टॉक में निवेश करता है। यदि दोनों स्टॉकों से कुल आय 855 रु० है, तो दोनों स्टॉकों में अलग-अलग निवेश ज्ञात कीजिए।

26. A person at the age of 25 years takes an insurance policy of sum assured Rs 50,000 for 30 years term. Calculate the premium for yearly payment assuming the following detail :

3

Tabular premium/Rs 1,000 = Rs 40

Rebate for large sum assured = Rs 2/Rs 1,000

Rebate for yearly payment = 3%

एक व्यक्ति जिसकी आयु 25 वर्ष है, 50,000 रु० की बीमा पॉलिसी 30 वर्ष के लिए लेता है। नीचे दिए गए विवरण के अनुसार वार्षिक भुगतान के लिए प्रीमियम की गणना कीजिए :

तालिका प्रीमियम/1,000 रु० = 40 रु०

अधिक बीमा-राशि के लिए छूट = 2 रु०/1,000 रु०

वार्षिक भुगतान के लिए छूट = 3%

Or / अथवा

Mrs. Ahuja's unit stitches 20 ladies suits per day, out of which 50% are exported to America and the rest are sold in domestic market. In preparing one suit, 5 m cloth is required, which is purchased at Rs 120/metre and she adds value of Rs 100 per suit. If excise duty on cloth is 5%, then calculate how much excise duty she has to pay to the government at the end of month using Cenvat transaction method.

श्रीमती आहुजा 20 लेडीज़ सूट प्रतिदिन सिलती है जिसमें से वह 50% अमेरिका निर्यात कर देती है तथा शेष 50% वह घरेलू बाज़ार में बेचती है। एक सूट बनाने में 5 मी० कपड़ा लगता है, जो 120 रु० प्रति मीटर के भाव से मिलता है तथा वह प्रत्येक सूट पर 100 रु० मूल्य जोड़ती है। यदि कपड़े पर उत्पादन-शुल्क 5% हो, तो ज्ञात कीजिए कि सैनवाट तरीका प्रयोग कर उसे सरकार को कितना शुल्क एक मास में देना पड़ेगा।

27. Construct by simple average of price relative method, the price index of 2004, taking 1999 as base year from the following data : 4

निम्नलिखित आँकड़ों से मूल्यानुपातों की सरल माध्य की रीति से 1999 को आधार वर्ष मानकर वर्ष 2004 के लिए मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिए :

Commodity (वस्तु)	A	B	C	D	E	F
Price in 1999 (in Rs) 1999 में मूल्य (₹० में)	60	50	60	50	25	20
Price in 2004 (in Rs) 2004 में मूल्य (₹० में)	80	60	72	75	37½	30

28. The cost function of a firm is given by $C = 2x^2 + x + 5$. Find (a) the average cost and (b) the marginal cost when $x = 4$. 6

एक फर्म का लागत फलन $C = 2x^2 + x + 5$ है, तो (क) औसत लागत तथा (ख) सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जब $x = 4$ है।
